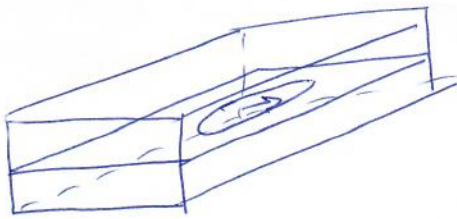


Индукционные ускорители. Бетатрон

рассм. обмен, произвольный м.а.



Р. Визгорт ≈ 1926 г.

Керст 1940 г. - первый и разработчик (≈ 11 МэВ)

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1) \quad \text{или}$$

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{S} \quad (2) \quad \text{— Теллеса Стокса}$$

За один оборот

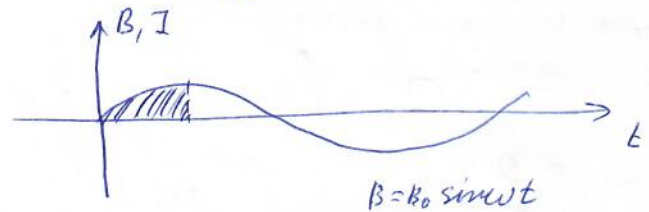
$$\oint \vec{E} d\vec{s} = 2\pi r \quad (3) \quad (r - \text{тепущий радиус})$$

$$- \frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{S} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (4)$$

$$\text{и} \quad \vec{E} = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{— среднее поле}$$

Умножив на радиус

$$\varphi > 0 \quad \frac{d\varphi}{dt} > 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \varphi_{\text{тока}}$$



Условие ускорения

$$F_{\text{г.с.}} = \frac{\gamma m v^2}{R}; \quad F_{\text{г.с.}} = e \vec{E} = \frac{dp}{dt} \quad \text{или} \quad p = e R \frac{\partial B}{\partial t}(t, R)$$

$$F_{\text{г.с.}} = F_{\text{г.с.}} \quad \text{или} \quad z = R \quad B = B_0$$

$$\frac{\gamma m v^2}{R} = e R B_0$$

или

$$\frac{\gamma m v^2}{R} = e v B_0$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{e B_0}{m \gamma} \quad \text{— частота обр.}$$

$$\text{или} \quad v = c \quad \omega = \text{const}$$

$$\frac{dp}{dt} = e \frac{\pi R^2}{2\pi R} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{e R}{2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\frac{dp}{dt} = e R \frac{\partial B_0}{\partial t}$$

$$\left[\frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial B_0}{\partial t} \right] \quad \text{— условие Визгорта — от Бетатрона}$$

$$\left[\frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial B_0}{\partial t} \right] \quad \text{— условие (усл. 2:1)}$$

$$\left[\frac{1}{2} B_0(R, t) = B(t) + C \right]$$

Грипыт элэриг в бетатроне. Фазисе и гехисе оуригит:

уяго $U(t) \approx C$, гора урэдсавим

$$\frac{d\varphi}{dt} \approx \frac{\varphi_{\max}}{t_{\text{уск}}} = \frac{\pi R^2 \Delta B}{t_{\text{уск}}} \Rightarrow E_{\text{уск}} = \frac{R}{2} \frac{\Delta B}{t_{\text{уск}}}$$

$$\Delta W_1 = 2\pi R E_{\text{уск}} = \pi R^2 \frac{\Delta B}{t_{\text{уск}}}$$

$$N = \frac{t_{\text{уск}}}{t_1} = \frac{t_{\text{уск}} C}{2\pi R}$$

$$W_{\max} = N \cdot \Delta W_1 = \frac{R}{2} \Delta B \cdot C; \text{ не зависит от } t_{\text{уск}}!$$

Оуелим:

$$R = 0,3 \text{ м}; \quad \Delta B = 0,3 \text{ Тл}; \quad f_{\text{уск}} = 50 \text{ Рг};$$

$$E_{\text{уск}} = \frac{0,3 \cdot 0,3}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \approx 9 \text{ В/м};$$

$$N = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^8}{2\pi \cdot 0,3} \approx \frac{15 \cdot 10^5}{2} \approx 750.000$$

$$\Delta W_1 = \pi \cdot 0,3^2 \frac{0,3}{5 \cdot 10^{-3}} \approx 18 \frac{\text{эВ}}{\text{одрот}};$$

$$W_{\max} \approx \underline{\underline{14 \text{ МэВ}}}$$

Потери на излучение:

$$Q = \frac{8\pi}{3} \gamma^2 \beta^2 z_0^2 E_0 C; \quad z_0 = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ м} - \text{классический радиус электрона.}$$

$$W_{\text{пот}} = Q T_{\text{одр}}$$

в релятив. случае

$$W_{\text{пот}} \approx \frac{90 W^4}{R}; \quad [W_{\text{пот}}] = \frac{\text{кэВ}}{\text{одрот}}; \quad [W] = \text{гэВ}; \quad [R] = \text{м};$$

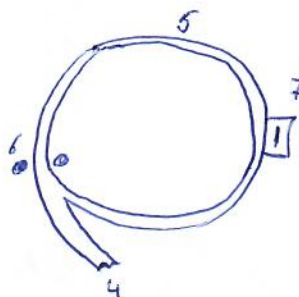
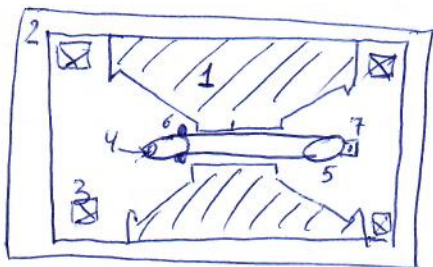
Оуелим:

$$W_{\text{пот}} \leq \Delta W_1$$

$$W^4 = \frac{\Delta W_1 R}{90} \approx \frac{9 \cdot 0,3 \cdot 10^{-3}}{90} = 0,03 \cdot 10^{-3} = W = 74 \text{ МэВ} \quad (20 \cdot 300 \text{ МэВ})$$

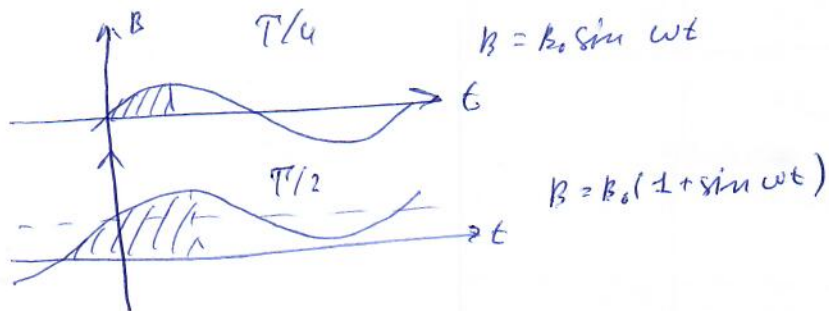
$$= 3 \cdot 10^{-5}$$

Устройство бетатрона



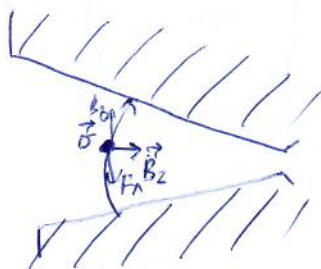
1. Полосный магнетизм
2. Ядро магнетизма
3. Обмотки
4. Внутр. или. внеш. магнетизм
5. Ван. камера с магнетизмом
6. Экспериментальная обмотка
7. Импантор

Бетатрон с подмагничиванием:

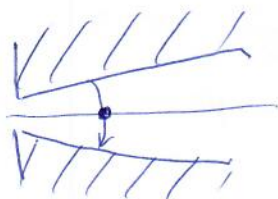


формулы к бетатрону:

$$\frac{\partial B_0}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow$$



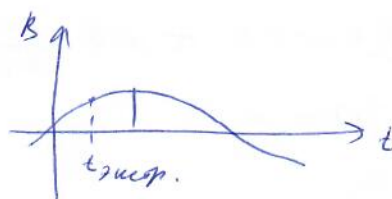
- при отклонении
вектора скорости поворачивается
и скорость вращения



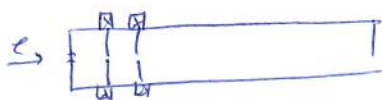
- нет устойчивости по
координатам

Примеры мед. бетатронов:

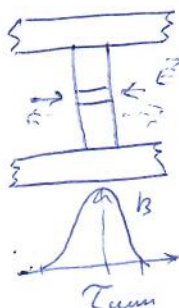
	W, МэВ	Разм. e^- Р/мм	Разм. γ Р/мм
Б5-25 ТРУ	7-25	300	40
Siemens 1952	6-42	500	100
БР-20А Шимидзу	4-20	700	60
25 КТМ АГБ-Хотенко	10-25	600	20



линейный бетатрон:



S - индукция сердечника



$$w = -e \frac{d\phi}{dt} = eS \frac{dB}{dt} \approx$$

$$\approx eS \frac{\Delta B}{T}$$

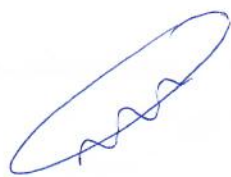
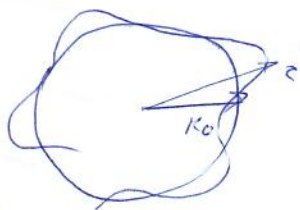
$$T_{пер} \approx 10-50 \text{ нс}$$

$$T_{сигнал} \approx 1 \text{ мкс}$$

+ время пролета частицы по
разряднику.

	$W, \text{ мВБ}$	$I_{\text{мин}}, \text{ А}$	$T, \text{ мс}$	$\text{счб. } Q, 1/\text{сч.}$
ЛУГ-3000 ОУГУ	3	200	350	25
ЕТА, LLNL	4	8000	30	1
ЕРА, LBAL	4,25	500	45	1
"сигурд", ОУГУ	3	2000	20	50
ЛУГ 5/5000 ИТЭФ	5	5000	50	1
АТА АТА2 LLNL	50 300	10.000 4.000	70 70	5 2000

Векторные колебания:



$$\frac{m \sigma^2}{R} = e \sigma B_0 - \text{направленные орбиты}$$

$$z = R + x \quad x \ll R$$

x :

$$F_{\text{г.д}} = \frac{m \sigma^2}{z} = \frac{m \sigma^2}{R+x} = \frac{m \sigma^2}{R(1+x/R)} = \frac{m \sigma^2}{R} - \frac{m \sigma^2}{R^2} x + \dots$$

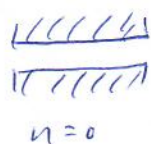
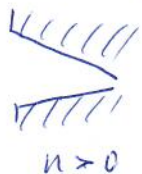
$$F_{\text{гра}} = e \sigma B_z(z) = e \sigma B_0 + e \sigma \frac{\partial B_z}{\partial z} \Big|_{x=0} x = 0$$

$$F_z = \frac{m \sigma^2}{z} - e \sigma B_z(z) = \frac{m \sigma^2}{R} - \frac{m \sigma^2}{R^2} x - e \sigma B_0 + e \sigma \frac{\partial B_z}{\partial z} \Big|_{x=0} x =$$

$$= - \frac{m \sigma^2}{R^2} \left(1 + \frac{R}{B_0} \frac{\partial B}{\partial z} \Big|_{x=0} \right) x = - \frac{m \sigma^2}{R^2} (1 - \eta) x$$

$$\left(e \sigma \frac{\partial B}{\partial z} x = \frac{m \sigma^2}{R^2} x \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{R^2 e}{m \sigma} \right) = \frac{m \sigma^2}{R^2} x \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{R}{B_0} \right)$$

η - показатель среды м.н.



аналогично для вертикальных колебаний:

$$\text{rot } \vec{B} = 0$$

для цилиндрич. системы координат

$$\left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{z=0}^{z=R} = \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{z=0}^{z=R} = -n \frac{B_0}{R}$$

$$\text{и } F_z = -n \frac{m v^2}{R^2} z$$

Итак:

$$F_x = -(1-n) \omega^2 m x$$

$$F_z = -n \omega^2 m z$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 (1-n) x = 0; \quad B_z(z) \approx B_0 \left(1 - n \frac{z}{R}\right)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 n z = 0; \quad B_z(z) \approx B_0 n \frac{z}{R}$$

Решение:

$$x = x_0 \sin(\omega_x t + \varphi_x); \quad \omega_x = \omega \sqrt{1-n}$$

$$z = z_0 \sin(\omega_z t + \varphi_z); \quad \omega_z = \omega \sqrt{n}$$

Устойчивость при $\omega_x^2 \geq 0; \omega_z^2 \geq 0 \Rightarrow \underline{0 < n < 1}$

$$\text{и } \omega_x < \omega; \quad \omega_z < \omega$$

Резонансы:

1) $\omega_x = \omega_z$ - резонанс связи

$$n = 1/2$$

2) $\omega_x = \frac{1}{2} \omega \quad n = 3/4$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \omega \quad n = 1/4$$

3) $\omega_x = \frac{1}{4} \omega; \quad \omega_z = \frac{1}{4} \omega$ и т.д.

$m \omega_x \pm n \omega_z = p$, p - порядок резонанса

Для неоднородной системы, где $(B_z, B_r)|_{z=0}^{z=R} \neq 0$

$$B_z(z) \approx B_0 \left(1 - n \frac{z}{R}\right) + \varepsilon_x \frac{z}{R};$$

$$B_x(z) \approx -B_0 n \frac{z}{R} + \varepsilon_z \frac{x}{R};$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_z$ - малые параметры связи безымянных колебаний

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 (1-n) x = -\frac{e c}{m} \varepsilon_x \frac{z(t)}{R}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 n z = \frac{e c}{m} \varepsilon_z \frac{x(t)}{R}$$

Период и частота и координаты:

$$S = R \int \omega(t) dt$$

$$v_x = \sqrt{1-n} \quad v_z = \sqrt{n} \quad - \text{мало интересует 3D эффект}$$

$$\boxed{v_x^2 + v_z^2 = 1}$$

$$\frac{dx}{ds} - \alpha_x = 0 \quad \frac{d\alpha_x}{ds} + v_x^2 \frac{x}{R^2} = 0$$

$$\frac{dz}{ds} - \alpha_z = 0 \quad \frac{d\alpha_z}{ds} + v_z^2 \frac{z}{R^2} = 0$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha_x \\ \alpha_z \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{если } \alpha_x' = \alpha_x \\ \text{или } \alpha_z' = \alpha_z \end{matrix}$$

Тогда

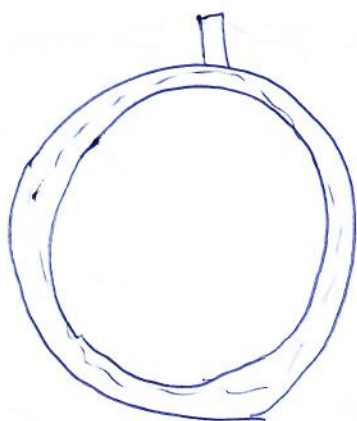
$$H(\vec{y}, \vec{z}) = v_x^2 \frac{x^2}{2} + v_z^2 \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} \quad ; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_z \end{pmatrix} ;$$

Уменьшение в детекторе

уменьшение ток:

$$I_{\text{сигн}} \approx \frac{1}{4} (kt)^3 I_0 \frac{R_c}{R_0} \ln \frac{R_c}{R_n}$$

где $I_0 = 17 \mu A$ - ток Ампером
 R - радиус. орбиты
 R_c - радиус, где поле. поле
 убав. (2:1)
 R_n - мал. радиус. поле



$$r = \Delta R + R$$

если 2:1 не балансируется

$$p_0(r) = e b_z(r) R$$

$$p_1(r) = p_0(r) + \delta p(r) = e b_z(R + \Delta R)(R + \Delta R)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 2\pi R^2 \frac{db_z(r)}{dt} + \int_R^{R+\Delta R} 2\pi r dr \frac{db_z(r)}{dt} \approx$$

$$\approx 2\pi R^2 \frac{db_z(r)}{dt} + 2\pi R \Delta R \frac{db_z}{dt} = 2\pi R^2 \frac{db_z(r)}{dt}$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{e}{2\pi c} \frac{d\varphi_1}{dt} \approx e R \frac{db_z(r)}{dt}$$

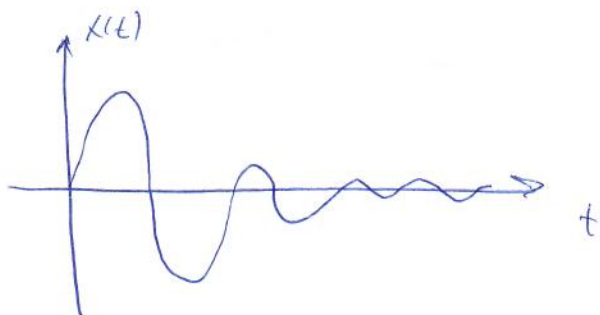
$$\frac{\delta p}{p_0} \approx \frac{\Delta R}{R}$$

Уменьшение на ось:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega \sqrt{1-n} x = 0$$

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} \ll 1$$

(R)



- гарм.
колебание

$$X(t) = A(t) \sin(f(t))$$

$$X = \frac{d^2 A}{dt^2} \sin f + 2 \frac{dA}{dt} \frac{df}{dt} \cos f - A \sin f \left(\frac{df}{dt} \right)^2 + A \frac{d^2 f}{dt^2} = \omega^2 \sin f$$

и

$$\frac{d^2 A}{dt^2} - A \left(\frac{df}{dt} \right)^2 = -\omega^2 A$$

$$2 \frac{dA}{dt} \frac{df}{dt} + A \frac{d^2 f}{dt^2} = 0$$

или

$$Z_0(t) = Z_0(0) - \sigma_v(t)t \Rightarrow dZ_0 = -v dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{dZ_0}{Z_0} = \frac{d\sigma_{K0}}{\sigma_{K0}} \Rightarrow Z_0(t) \sigma_{K0}(t) = \text{const}$$

$$\omega = \frac{\sigma_0(t)}{Z_0(t)} \Rightarrow \lambda \sim \frac{1}{\sqrt{\omega}} \quad \text{и} \quad \boxed{\lambda^2 \omega = \text{const}}$$