

Рассчитать кинематический анализ:

Рассчит. поперечное горизонтальное (по x) движение:

$$x'' + \omega_x^2(s) \cdot x = 0 \quad (1) \quad \text{где}$$

$$\omega_x^2(s) = \underbrace{h^2(s)}_{\text{уст. част.}} + \underbrace{k(s)}_{\text{вынужд.}} = \left( \frac{e}{p} B_{z0}(s) \right)^2 + \frac{e}{p} G(s) \quad (2) \quad G = \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} \right)_{x=0, z=0} \quad (1.7)$$

$h = 1/20$  - кривизна траектории (при  $h=0$  - лин. ускоритель)

Решение (1) обычно рассм. для случая реального уст. (синхротрона), где магниты с разл. функциями расстановлены отдельно и есть участки, где

$B_{z0}(s) = 0$ ;  $G(s) = 0$  - промежуточный участок;

$B_{z0}(s) = B_{z0} = \text{const}$ ;  $G(s) = 0$  - дипольный магнит;

$B_{z0}(s) = 0$ ;  $G(s) = G_0 = \text{const}$  - кв. магнит

без уст. кривых дифференц.

①  $\omega_x^2 > 0$  - пром.-й участок

$$x(s) = a \cos(\omega_x s) + b \sin(\omega_x s) \quad (2) \quad a \text{ и } b - \text{опред. начальными условиями}$$

②  $\omega_x^2 = 0$  - пром. участки

$$x(s) = a \cdot s + b \quad (3)$$

③  $\omega_x^2 < 0$  - дрейф. участки

$$x(s) = a \cosh(\omega_x s) + b \sinh(\omega_x s) \quad (4)$$

введем  $\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} (s)$ ;  $x(s) = a \cos(\omega_x s) + b \sin(\omega_x s) \quad (6)$

$$x'(s) = -a \omega_x \sin(\omega_x s) + b \omega_x \cos(\omega_x s) \quad (7)$$

подставим в (6) и (7)

$$x_0 = x(0); \quad x'_0 = x'(0) \quad \text{и}$$

$$a = x_0; \quad b = \frac{x'_0}{\omega_x} \quad (8)$$

или в матричной форме

$$\vec{x}(s) = M_F \vec{x}_0 \quad (9)$$

$M_F$  - матрица перехода для пром. участка

$$M_F = \begin{pmatrix} \cos(\omega_x s) & \frac{1}{\omega_x} \sin(\omega_x s) \\ -\omega_x \sin(\omega_x s) & \cos(\omega_x s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k_x} s & \frac{1}{\sqrt{k_x}} \sin \sqrt{k_x} s \\ -\sqrt{k_x} \sin \sqrt{k_x} s & \cos \sqrt{k_x} s \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$k_x = \omega_x^2$$

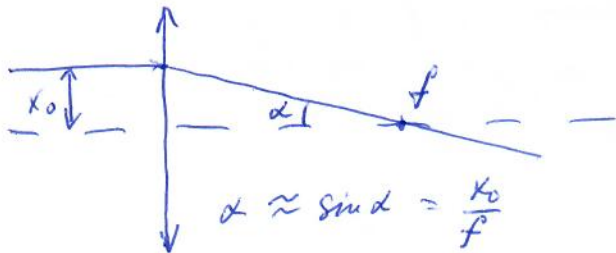
$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11) \quad - \text{для упрямости графика}$$

$$M_D = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \sqrt{|k_x|} S & \frac{1}{\sqrt{|k_x|}} \operatorname{sh} \sqrt{|k_x|} S \\ \sqrt{|k_x|} \operatorname{sh} \sqrt{|k_x|} S & \operatorname{ch} \sqrt{|k_x|} S \end{pmatrix} \quad (12) \quad - \text{для деп. участка}$$

Переход к полным углам:

рассм. (5) до и после кр. угла

$$x = 1 x_0 + 0 x_0' ; \quad x' = -\frac{1}{f} x_0 + 1 \cdot x_0' \quad (13)$$



$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = M_x \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0$$

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

а (12) или (10) можно использовать (14) в предельном переходе при  $S \rightarrow 0$

Сист. элементов перехода:

$$\vec{x} = M_n \cdot \dots \cdot M_2 \cdot M_1 \vec{x}_0 \quad (16)$$

Со. Т. Лувиния: физ. обмен сохраняется  $\Rightarrow |M| = 1$

Решение ур-ний движения (1)

$$x'' + k_x(s) x = 0 \quad (16) \quad - \text{уравнение Хилла}$$

$$x(s) = A \cdot w(s) \cdot \cos(\mu(s) + \mu_0) \quad (17) \quad A \text{ и } \mu_0 - \text{определяются}$$

начальными условиями;  $\mu(s)$  - "фазовая функция" ("Параметр Фазы")

$w(s)$  - амплитудная функция Флора

Вводится  $\beta$ -функция ("Бетатрон-функция")  $\beta(s) = w^2(s)$  и

$$x(s) = A \sqrt{\beta(s)} \cos(\mu(s) + \mu_0) \quad (18)$$

Подставим (18) в (16)

~~$$x'' + k_x(s) x = 0 \Rightarrow A \left( -\sqrt{\beta} \mu'' - \frac{\beta'}{2\sqrt{\beta}} \right) \cos(\mu + \mu_0) + A \sqrt{\beta} k_x(s) \cos(\mu + \mu_0) = 0$$~~

$$x = A \sqrt{\beta} \cos(\mu + \mu_0)$$

$$x' = A \frac{\beta'}{2\sqrt{\beta}} \cos(\mu + \mu_0) = A \sqrt{\beta} \mu' \sin(\mu + \mu_0)$$

$$x'' = \frac{A \beta''}{2\sqrt{\beta}} \cos(\mu + \mu_0) + \frac{A \beta'^2}{4\sqrt{\beta}^3} \cos(\mu + \mu_0) - \frac{A \beta' \mu'}{2\sqrt{\beta}} \sin(\mu + \mu_0) -$$

$$- \frac{A \beta' \mu'}{2\sqrt{\beta}} \sin(\mu + \mu_0) - A \sqrt{\beta} \mu'' \sin(\mu + \mu_0) - A \sqrt{\beta} \mu'^2 \cos(\mu + \mu_0)$$

упростим и получим:

$$x'' + k_x x = A \left( -\sqrt{\beta} \mu'' - \frac{\beta' \mu'}{2\sqrt{\beta}} - \frac{\beta' \mu'}{2\sqrt{\beta}} \right) \sin(\mu + \mu_0) +$$

$$+ A \left( -\sqrt{\beta} \mu'^2 - \frac{\beta'^2}{4\sqrt{\beta}^3} + \frac{\beta''}{2\sqrt{\beta}} + k \right) \cos(\mu + \mu_0) \quad (19)$$

т.к.  $\beta$  и  $\mu$  не должны зависеть от нач. фазы  $\mu_0$ , то обе части (19) должны быть  $= 0$  независимо  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \beta \mu'' + \beta' \mu' = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\mu'}{\mu} = -\frac{d\beta}{\beta} \quad (20)$$

Если (20) проинтегрировать, то получим два метода интегрирования и фазой дефаз. интегрирования:

$$\mu' = \frac{d\mu(s)}{ds} = \frac{1}{\beta(s)} \quad \text{или} \quad \beta\text{-функция}$$

$$\mu(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta s} \quad (21)$$

Если  $(F)\cos$  умножить на  $\sqrt{\beta}^2$ , то получим уравнение для безразмерной функции

$$2\beta \beta'' - \beta'^2 + 4k_x(s) \beta^2 = 4 \quad (22)$$

Инвариант Купера - Стайтера:

рассм. отклонение от равновесной орбиты:

$$x(s) = A \sqrt{\beta(s)} \cos(\mu(s) + \mu_0) \quad (23)$$

$$x'(s) = \frac{\beta'}{2\beta} A \sqrt{\beta} \cos(\mu + \mu_0) - \frac{A}{\sqrt{\beta}} \sin(\mu + \mu_0) = \frac{\beta'}{2\beta} x - \frac{A}{\sqrt{\beta}} \sin(\mu + \mu_0) \quad (24)$$

видим, что и в момент, возведем в квадрат, получим:

$$\frac{x^2}{\beta} + \beta \left( x' - \frac{\beta' x}{2\beta} \right)^2 = A^2 \quad (25)$$

это полностью для заданных начальных условий, известен инвариант, тот Купера - Стайтера.

(кфс)



введем:

$$\alpha(s) = \frac{-\beta'(s)}{2} \quad \gamma(s) = \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)} \quad (26)$$

можно переписать уравнение Куранта - Стайтера в канонический вид:

$$\gamma(s) x^2 + 2\alpha(s) x x' + \beta(s) x'^2 = A^2 \quad (27)$$

$\alpha, \beta, \gamma$  - параметры Куранта - Стайтера (параметры Гессе)

Ур-ние (27) - ур-ние эллипса с углом  $\varphi$ :  $\tan \varphi = \frac{2\alpha}{\gamma - \beta}$

Площадь (эллипса)

$$S = \frac{\pi A^2}{\sqrt{\gamma\beta - \alpha^2}} = \pi A^2 \quad (28)$$

или запись со среднеквадратичным отношением  $\sigma_x = x_{max}$

$$A_{ox}^2 = \frac{\epsilon_x}{\pi} \quad (29)$$

Связь параметров Гессе (Куранта - Стайтера) с полу. эллипсами:

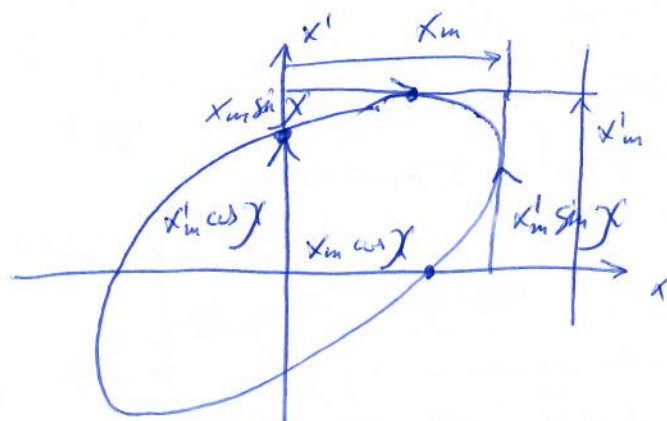
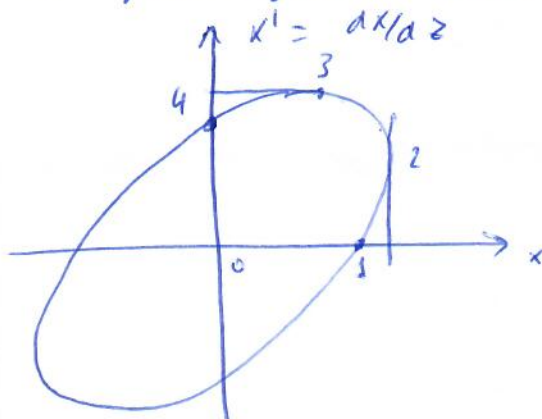
$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \epsilon \quad (\text{площадь эллипса } S = \pi \epsilon)$$

$\beta\gamma - \alpha^2 = 1$  - связь параметров (достаточно исп. только 2 в-а)

$$\alpha = -\frac{1}{2}\beta'$$

$$[\alpha] = 1; \quad [\beta] = [m]; \quad [\gamma] = \frac{1}{m}; \quad \beta > 0; \gamma > 0;$$

для риска, углы  $\alpha > 0$



$$\sin X = z_{12}$$

$$x = x_m \cos X$$

$$x' = x'_m \sin(\delta + X)$$

$\delta \in [0, 2\pi]$  - угол

$$(k\varphi, 4) \quad \epsilon = x_m x'_m \cos X$$

Тогда, $\gamma$	Параметры. Запись	Параметры. Тензоры
	Пусть $\gamma = x_2'/x_4' = x_3/x_1 = -\alpha$	$\alpha \equiv -x_2'/x_4' = -x_3/x_1$ ; $\beta = \frac{x_2}{x_4}$ ; $\gamma = \frac{x_3}{x_1}$ $\epsilon = x_2 x_4 = x_1 x_3$
	$x$ $x'$	$x$ $x'$
① $-\chi$	$x_m \cos \chi$ 0	$\sqrt{\frac{\epsilon}{\gamma}}$ 0
② 0	$x_m$ $x_m' \sin \chi$	$\sqrt{\epsilon \beta}$ $-\alpha \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta}}$
③ $90^\circ - \chi$	$x_m \sin \chi$ $x_m'$	$-\alpha \sqrt{\frac{\epsilon}{\gamma}}$ $\sqrt{\epsilon \gamma}$
④ $90^\circ$	0 $x_m' \cos \chi$	0 $\sqrt{\frac{\epsilon}{\beta}}$

Тогда

$$x_m = \sqrt{\epsilon \beta}$$

$$x_m' = \sqrt{\epsilon \gamma}$$

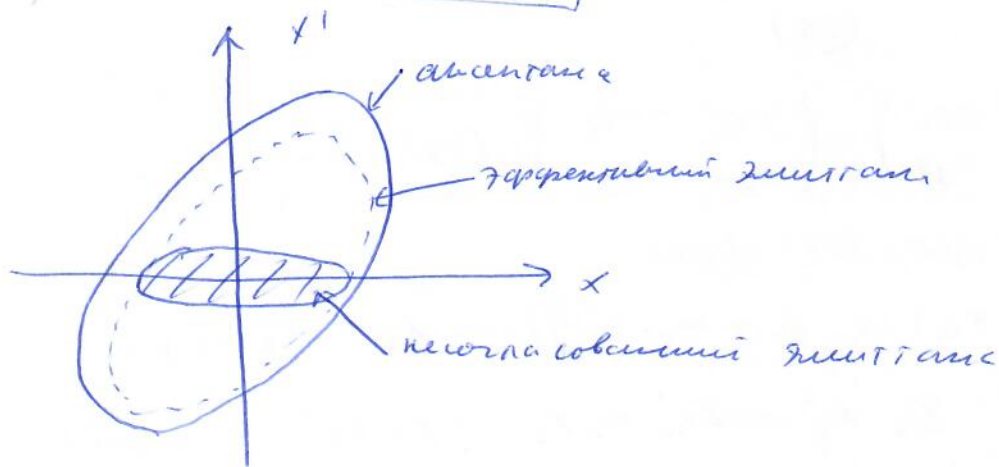
$$\chi = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\beta = \frac{x_m}{x_m' \cos \chi} = \frac{x_m^2}{\epsilon}$$

$$\gamma = \frac{x_m'}{x_m \cos \chi} = \frac{x_m'^2}{\epsilon}$$

$$\alpha = -\tan \chi$$

Смещение канона:



Матрица перехода и напряженность тензора:

$$x(s) = \sqrt{\beta(s)} (A \cos \mu(s) + B \sin \mu(s)) \quad (30)$$

$$x'(s) = \frac{1}{\sqrt{\beta(s)}} [(B - A\alpha(s)) \cos \mu - (A + B\alpha(s)) \sin \mu] \quad (31)$$

$$x(0) = x_0; \quad x'(0) = x_0'; \quad \beta(0) = \beta_0; \quad \alpha(0) = \alpha_0; \quad \mu(0) = 0;$$

Тогда

$$x_0 = A \sqrt{\beta_0}; \Rightarrow A = x_0 / \sqrt{\beta_0} \quad (32)$$

$$x_0' = \frac{(B - A\alpha_0)}{\sqrt{\beta_0}}; \Rightarrow B = \frac{x_0'}{\sqrt{\beta_0}} + \frac{x_0 \alpha_0}{\sqrt{\beta_0}} \quad (33)$$

(Корб)

Подставим (32) и (33) в (30) и (31) получим:

$$X(s) = X_0 \left[ \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}} \cos \mu(s) + \alpha_0 \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}} \sin \mu(s) \right] + X_0' \sqrt{\beta(s) \beta_0'} \sin \mu(s) \quad (34)$$

$$X'(s) = \frac{-X_0}{\sqrt{\beta(s) \beta_0'}} \left[ (\alpha(s) - \alpha_0) \cos \mu(s) + (1 + \alpha(s) \alpha_0) \sin \mu(s) \right] + X_0' \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}} (\cos \mu(s) \alpha(s) \sin \mu(s)) \quad (35)$$

или

$$\vec{X}(s) = M(s_0 \rightarrow s) \vec{X}_0 \quad \text{и}$$

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}} (\cos \Delta \mu + \alpha_0 \sin \Delta \mu) & \sqrt{\beta(s) \beta_0'} \sin \Delta \mu \\ \frac{-1}{\sqrt{\beta(s) \beta_0'}} [(\alpha(s) - \alpha_0) \cos \Delta \mu + (1 + \alpha(s) \alpha_0) \sin \Delta \mu] & \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0'}} [\cos \Delta \mu - \alpha(s) \sin \Delta \mu] \end{pmatrix} \quad (36)$$

Т.к. у нас невырожденная матрица Кутца-Стеффенса, то

$$\gamma_1 X_1^2 + 2\alpha_1 X_1 X_1' + \beta_1 X_1'^2 = \gamma_0 X_0^2 + 2\alpha_0 X_0 X_0' + \beta_0 X_0'^2 \quad (37)$$

Т.к.  $\vec{X}_1 = M \vec{X}_0$  и  $M^{-1} M = I$  - единичная матрица, то

$$\vec{X}_0 = M^{-1} \vec{X}_1 \quad (38)$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} \quad (39) \quad \text{т.к. } |M| = 1$$

Вспомогательные (37) используя (38) и (39):

$$\gamma_0 (m_{22} X_1 - m_{12} X_1')^2 + 2\alpha_0 (m_{22} X_1 - m_{12} X_1') (-m_{21} X_1 + m_{11} X_1') + \beta_0 (-m_{21} X_1 + m_{11} X_1')^2 = \gamma_1 X_1^2 + 2\alpha_1 X_1 X_1' + \beta_1 X_1'^2 \quad (40)$$

Введем подстановки вместо:

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= m_{11}^2 \beta_0 - 2m_{11} m_{12} \alpha_0 + m_{12}^2 \gamma_0; \\ \alpha_1 &= -m_{11} m_{21} \beta_0 + (m_{11} m_{22} + m_{12} m_{21}) \alpha_0 - m_{12} m_{22} \gamma_0; \\ \gamma_1 &= m_{21}^2 \beta_0 - 2m_{21} m_{22} \alpha_0 + m_{22}^2 \gamma_0; \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

~~Получим~~

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11} m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{11} m_{21} & m_{11} m_{22} + m_{12} m_{21} & -m_{12} m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{21} m_{22} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_0 \quad (42)$$



Например для св. променности ( $S \rightarrow 0$ ) и:

$$\left. \begin{aligned} \beta(S) &= \beta_0 - 2\gamma_0 S + \gamma_0 S^2; \\ \alpha(S) &= \alpha_0 - \gamma_0 S; \\ \gamma(S) &= \gamma_0; \end{aligned} \right\} (43)$$

имеет вид:

$\alpha_0 = 0 \Rightarrow \beta(S) = \beta_0 + \frac{S^2}{\beta_0}$ ; т.е. безотражающая граница имеет вид параболы без м.и., причем тем быстрее, тем меньше  $\beta_0$ . Таким образом, размер шунка здесь растет линейно.

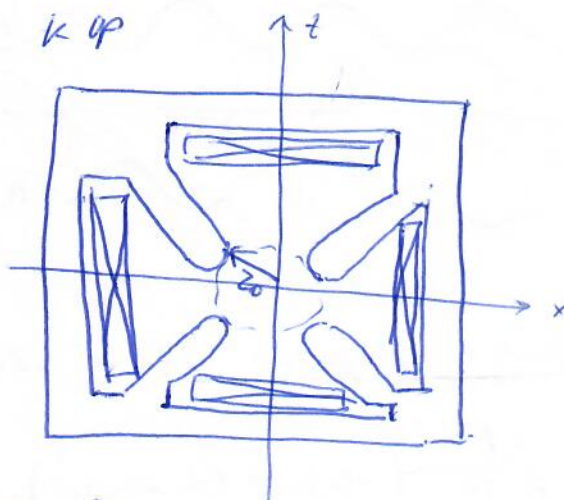
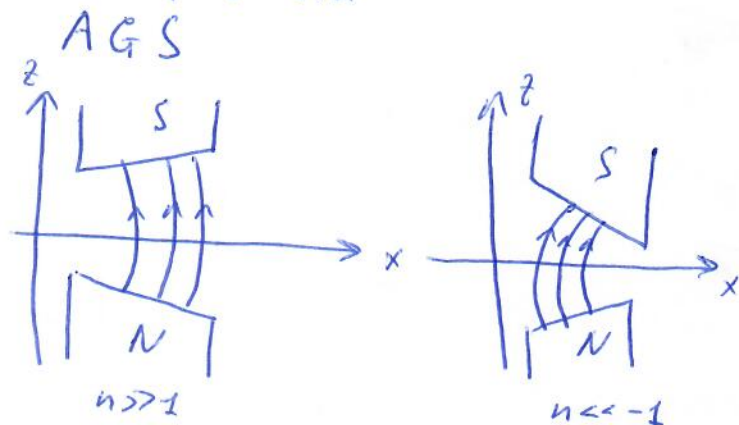
Синхронизация фазы ускорителя:

при  $0 < n < 1$   $\omega_{x,z} < \omega_{обр}$

чем меньше частота, тем больше амплитуда

колебаний при  $|n| \gg 1$   $|\omega_{x,z}| \gg \omega_{обр}$

два варианта



$$B_z = G x; \quad B_x = G z; \quad (44)$$

$$\begin{aligned} F_x &= e v B_z(x, z); \quad F_z = e v B_x(x, z); \\ F_x &= -e v G x; \quad F_z = e v G z; \end{aligned} \quad (45)$$

Решение уравнения движения безотражающего поля:

$$\frac{d}{ds} p \frac{d}{ds} x + k(s) x = 0 \quad (46)$$

$$x(s) = A \sqrt{\beta(s)} \cos(\mu(s) + \mu_0); \quad \mu(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta(s)};$$

$$\beta(s) = \beta(s + L)$$

$$X_m(s) = \pm A \sqrt{\beta(s)} \quad (4.7)$$

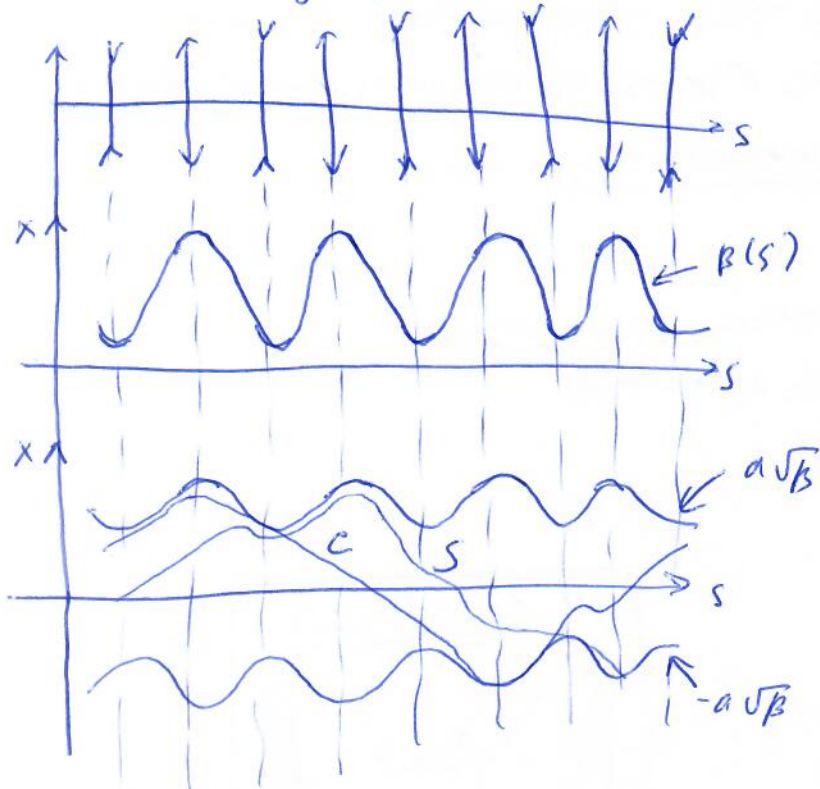
введем поканально функцию безотраженных потерь:

$$\text{т.т. } \beta(s) = \lambda(s) \text{ и}$$

$$2\beta\beta'' - \beta'^2 + 4K_x(s)\beta^2 = 4 \quad (\text{см. (22)})$$

Максимумы  $\beta(s)$  будут в точках, где  $K(s) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  в группов. элементах; минимумы - в дефазированных



Матрица одорова: (см. (36))

$$\left. \begin{aligned} M &= \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}} (\omega \Delta M + \alpha_0 \sin \Delta M) & \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}} \sin \Delta M \\ & - \frac{1}{\sqrt{\beta(s)\beta_0}} [(\alpha(s) - \alpha_0) \omega \Delta M + (1 + \alpha(s)\alpha_0) \sin \Delta M] & \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}} (\omega \Delta M - \alpha(s) \sin \Delta M) \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

иногда удобнее матрица одорова  $s \rightarrow s+L$  и

$$M_R = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \Delta M + \alpha \sin \Delta M & \beta \sin \Delta M \\ -\alpha \sin \Delta M & \omega \Delta M - \alpha \sin \Delta M \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

учтем, что

$$\beta(s+L) = \beta(s) = \beta \quad ; \quad \alpha(s+L) = \alpha(s) = \alpha$$

(к.ф.з.)



из (49) можно получить критерий существования резонансного решения ур-ния Бетатрон. колебаний; в этом случае  $\mu$  - веществ. числ

$$\frac{1}{2} |Sp M_K| = \frac{1}{2} |m_{11} + m_{22}| = |\cos \mu| < 1 \quad (50)$$

из (49) и (50)

$$\beta = \frac{m_{12}}{\sin \mu} ; \quad \alpha = \frac{m_{11} - m_{22}}{2 \sin \mu} ; \quad \gamma = \frac{-m_{21}}{\sin \mu} \quad (51)$$

из (51) можно найти  $\sin \mu$ , но без учета знака; однако следует  $\beta > 0$ , знак  $\sin \mu$  сов. со знаком  $m_{12}$ .

Надес фазы бетатронных колебаний на всей длине пучка (число бетатронных колебаний, "бетатронное число" или "приведенная бетатронная частота"):

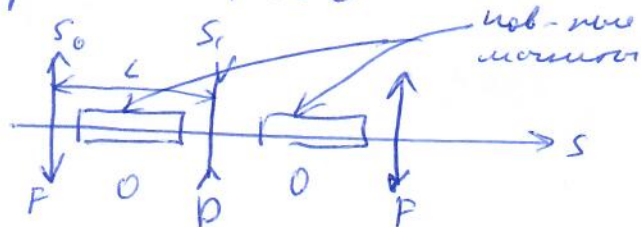
$$\nu = \frac{\mu N}{2\pi} = \frac{N}{2\pi} \int \frac{dS}{\beta(S)} ; \quad (52) \quad N - \text{число периодов оптической структуры на пучке}$$

Если выбрать  $\alpha = 0$ , что всегда возможно из-за произвольности выбора  $S=0$ , то

$$M_K = \begin{pmatrix} \cos \mu & \beta \sin \mu \\ -\frac{1}{\beta} \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} \quad (53)$$

Расчет матр. структуры узко. уст.-м.

рисун. FODO



- приближенно вычитем малой фок-ми ( $\sim f^{-2}$ )
- будем считать матр. гомогенной с  $f_F$  и  $f_D$
- из-за зеркальной симметрии можно рассм. половину отсчитывая от  $S_0$  до  $S_1$  длиной  $L$
- пусть  $\hat{\beta}$  - макс.  $\beta$ -функции  
 $\hat{f}$  - мин.  $\beta$ -функции  
макс. - в  $F$ , мин. - в  $D$

Матрица перехода:

$$M(S_0 \rightarrow S_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +\frac{1}{f_D} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_F} & 1 \end{pmatrix} \quad (54)$$

введем  $F = \frac{L}{f_F}$ ;  $D = \frac{L}{f_D}$  и

$$M(S_0 \rightarrow S_1) = \begin{pmatrix} 1 - F & L \\ -\frac{F - D + FD}{L} & 1 + D \end{pmatrix} \quad (55)$$

или через параметр Купера - Стюарта:

$$M(S_0 \rightarrow S_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\hat{\beta}}} \cos \frac{\mu}{2} & \sqrt{\frac{\hat{\beta}}{\beta}} \sin \frac{\mu}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{\frac{\hat{\beta}}{\beta}}} \sin \frac{\mu}{2} & \sqrt{\frac{\hat{\beta}}{\beta}} \cos \frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (56)$$

$L=0$  в минимумах и максимумах;  $\mu$  - разность фаз на пути;  
 для вершинных элементов  $F$  и  $D$  надо поменять местами;  
 $m_{21} m_{12} = \sin^2 \frac{\mu_1}{2} = F - D - FD \leq 1$ ;  $\sin^2 \frac{\mu_2}{2} = D - F + FD \leq 1$ ; (57)

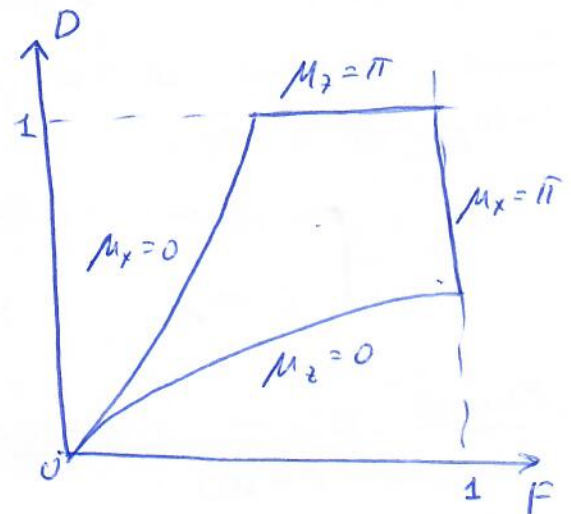
ограничения обл. устойчивости:

$$\sin \frac{\mu_1}{2} = 1 \quad (\mu_1 = \pi) \rightarrow F = 1 \text{ и}$$

$$\sin \frac{\mu_1}{2} = 0 \quad (\mu_1 = 0) \rightarrow F = \frac{D}{1+D}$$

$$\sin \frac{\mu_2}{2} = 1 \quad (\mu_2 = \pi) \rightarrow D = 1$$

$$\sin \frac{\mu_2}{2} = 0 \quad (\mu_2 = 0) \rightarrow D = \frac{F}{1+F}$$



и матрица перехода:

$$M(S_0 \rightarrow S_1) = \begin{pmatrix} 1 - L/f & L \\ -L/f^2 & 1 - L/f \end{pmatrix}; \quad (58)$$

учи. устойчивости

$$-m_{21} m_{12} = \sin^2 \frac{\mu}{2} = \frac{L^2}{f^2} < 1 \text{ или } L < f; \quad (59)$$

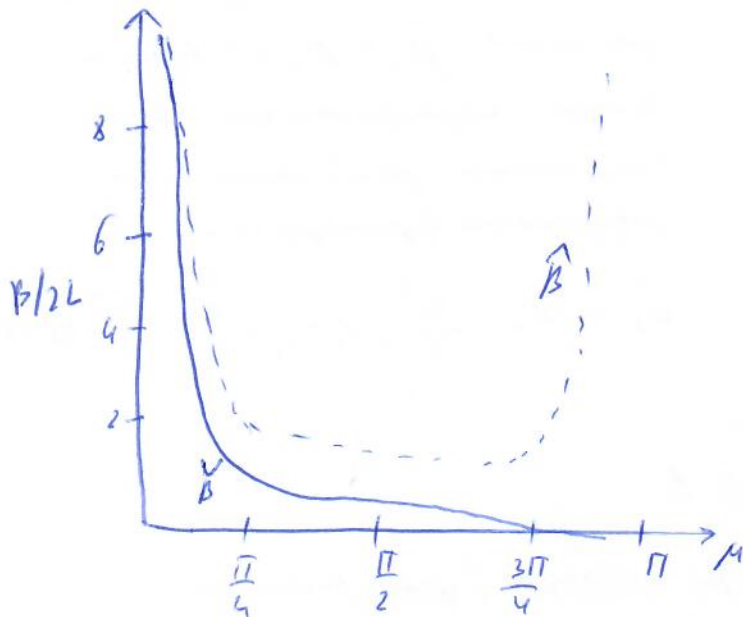
Комбинировать

$$m_{12} = L = \sqrt{\frac{\beta}{\hat{\beta}}} \sin \frac{\mu}{2} \text{ и } \mu_{11} = 1 - \frac{L}{f} = \sqrt{\frac{\hat{\beta}}{\beta}} \cos \frac{\mu}{2}$$

учетом (59) можно получить выражение для безразмерной функции:



$$\hat{\beta} = 2L \frac{1 - \sin \frac{\mu}{2}}{\sin \mu} \quad \text{и} \quad \hat{\beta} = 2L \frac{1 + \sin \frac{\mu}{2}}{\sin \mu} \quad (60)$$



Видно, что при  
малых величинах  $\hat{\beta}$ ,  
то есть при  $\mu \approx 60^\circ \div 100^\circ$ ,  
 $\hat{\beta}$  имеет полный минимум  
при  $0$  и  $\pi$   $\hat{\beta} \rightarrow \infty$ ;  
В терминах безразмерной частоты  
 $\beta = \mu / 2\pi$  это значит, что  
необходимо удалять при  $N_c$   
частот, близких к целым  
значениям  $\beta = N_c$  и  $\beta = \frac{N_c}{2}$   
("резонансы")

Квадратичные члены поперечной амплитуды:

$$M_{ul} = \begin{pmatrix} \cos X_1 & \frac{S_{ul}}{X_1} \sin X_1 \\ -\frac{X_1}{S_{ul}} \sin X_1 & \cos X_1 \end{pmatrix} \quad (61)$$

$X_{1,2} = S_{ul} \sqrt{\pm \frac{e}{p} \frac{\partial B_z}{\partial x}} = \frac{S_{ul}}{p} \sqrt{n}$ , перепишем две матрицы вида

(61) для действительных, комплексных:

$$\cos \mu_x = \cos X_1 \cos X_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{X_1}{X_2} + \frac{X_2}{X_1} \right) \sin X_1 \sin X_2; \quad (62)$$

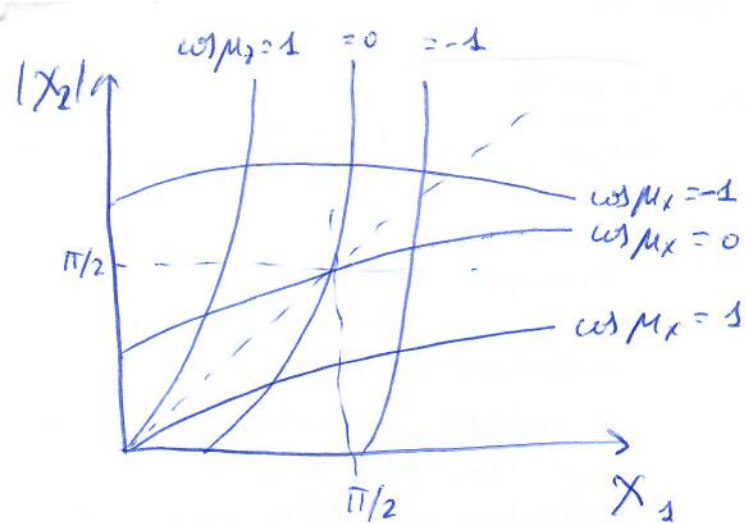
$$\cos \mu_z = \operatorname{ch} X_1 \operatorname{ch} X_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{X_1}{X_2} + \frac{X_2}{X_1} \right) \operatorname{sh} X_1 \operatorname{sh} X_2; \quad (63) \text{ т.к. } n \rightarrow -n \quad X \rightarrow iX$$

$X_1$  и  $X_2$  не могут быть действ. или мнимыми одновременно,  
т.к.  $|\cos \mu_{x,z}| \leq 1 \Rightarrow n_1$  и  $n_2$  должны иметь разные знаки.  
имеет  $n_1 \geq 0$ ;  $n_2 < 0$ ;

$$\begin{aligned} \cos \mu_x &= \cos X_1 \operatorname{ch} X_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{X_1}{|X_2|} + \frac{|X_2|}{X_1} \right) \sin X_1 \operatorname{sh} |X_2|; \\ \cos \mu_z &= \operatorname{ch} |X_1| \cos X_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{|X_1|}{X_2} + \frac{X_2}{|X_1|} \right) \operatorname{sh} |X_1| \sin X_2; \end{aligned} \quad (64)$$

и  $X_1 \leftrightarrow |X_2|$  не меняем  $(X_1, |X_2|)$





центр области устойчивости соответствует  $\chi_1 = |\chi_2| = \pi/2$  при этом  $\mu_1 = \mu_2 = \pi/2$ , а на длине периода волны безотра. Полюс должен удовлетворять 4 элемента периодичности и

$$u_1 = -u_2 = \frac{N^2}{4}; \quad v_1 = v_2 = \frac{N}{4} = \frac{\sqrt{u_1}}{2}; \quad (65)$$

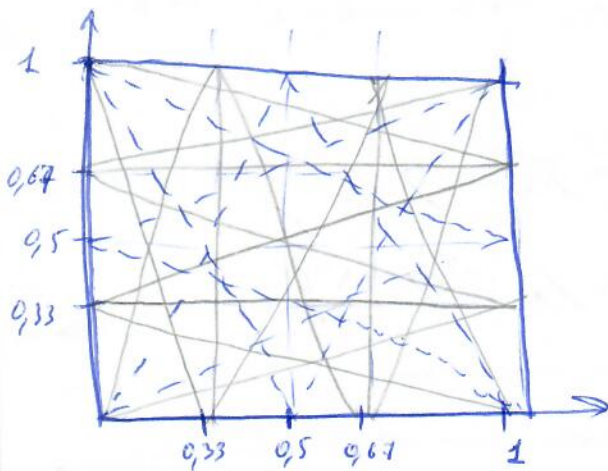
Эк:

$\nu \approx 10$  при  $|n| \approx 400$  дает  $N = 40$ !

можно выбрать р.т. и по в центре области устойчивости, но не близки к ее границе: если  $\omega \mu_{k,2}$  близки к 1, то по одной из итераций прок-ка будет существенно снижена и размер будет больше. Если  $\cos \mu_{k,2} \rightarrow -1$ , то увеличится модуль итерации и размер.

Резонансы:

Полнота поглощения р.т. необходимо поддерживать примерно  $= 0,1$  и уходить от резонансов. Это сильно ограничивает возможность использовать озеро больших  $N$  на практике.



— резонансные линии 1-3 порядков  
— 1 порядок  
--- 2 порядка  
- · - 3 порядка