

Синхротрон

$$R = \text{const} \Rightarrow B(t) \uparrow; \omega(t) \neq A \text{ или } \omega_{\text{оср}} = q \omega_0$$

свободн или инвариант (AGS или иб) группировка

свободн:

$$e^- \quad 680 \text{ МэВ} \quad \text{ФЧАН} \quad 1952$$

$$p^+ \quad 6 \text{ ГэВ} \quad \text{Беркли} \quad 1956$$

$$p^+ \quad 10 \text{ ГэВ} \quad \text{"Синхрофазотрон" ОИЯИ} \quad 1957$$

$$\text{AGS (ANL)} \approx 20 \text{ ГэВ}$$

$$p^+ \quad \text{PS CERN} \quad 28 \text{ ГэВ} \quad 1959$$

Требования:

1. Большая энергия и интенсивность
2. $B(t) \uparrow$, минимальная интенсивность
3. $\omega(t) \uparrow$, когда $\beta \neq 1$

$$W_s = \sqrt{\omega_0^2 + p^2 c^2} = \sqrt{\omega_0^2 + e^2 c^2 B^2(t) R^2} \quad (1)$$

и

$$\omega_0(t) = q W_s = \frac{q e c^2 B(t)}{W_s} \quad (2)$$

$$\omega_0(t) = \frac{q c}{R} \left[1 + \left(\frac{\omega_0}{e c R B(t)} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (3)$$

Оценим:

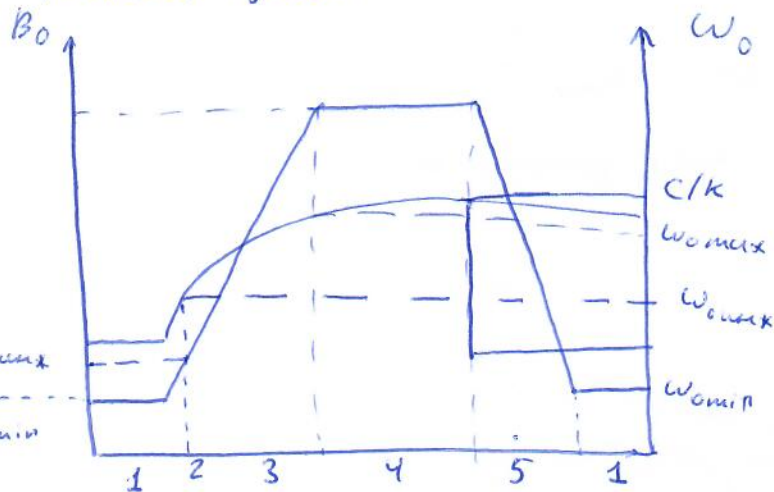
$$e^-: \quad \frac{\omega_0}{e c R B} = \frac{5 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^8 \cdot 30 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^{10}} \approx 2,5 \cdot 10^{-5} - \text{маленькая величина}$$

$$p^+: \quad \frac{\omega_0}{e c R B} = \frac{9 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8 \cdot 30 \cdot 2} = 0,05 \quad (\text{маленькое ускорение})$$

$$= \frac{9 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8 \cdot 30 \cdot 0,02} = 5$$

необходимо
увеличить частоту в
процессе ускорения

Рабочий цикл:



B_{min} - остаточная минимальная величина

$B_{max} > B_{min}$

1. Пауза;
2. накачка;
3. ускорение;
4. вывод;
5. сброс поля;

из (1) можно еще получить:

$$W_{max} \approx \sqrt{W_0^2 + \left(\frac{W_{max}}{\theta}\right)^2}; \quad (4) \quad \text{где } \theta = B_{max}/B_{min}$$

если $\theta = 100$, то второй член можно считать пренебрежимо малым

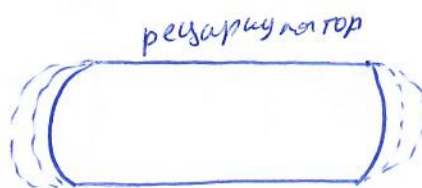
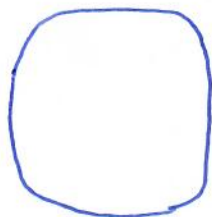
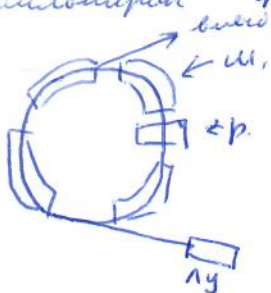
и $W_{max} = \frac{W_{max}^2}{2W_0\theta}$ и необходимая величина W_{max} \uparrow по квадратичному закону (5 мАВ при $W_{max} = 10 \text{ ГэВ}$; 50 мАВ при 30 ГэВ)

если $W_{max} \gg W_0$, то

$$W_{max} \approx \frac{W_{max}}{\theta};$$

$W_{\text{пр}} = 300 \text{ ВК}$ - определять размер и изм. В

В С. Лаборатории магнитов и поворачивающих лучей и фокусируют;
В сильноточных функциях разделены: дальномеры и поворачивающие, из. сгущ. пуч.

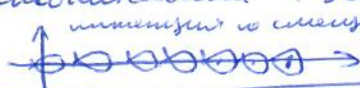


синхронизм.

2 режима:

БЦ (буфер)

накопитель (Storage)



Ограничение по энергии:

p^+ : $W_{\text{пр}} = 300 \text{ ВК}$

e^- : изм. $\Delta W \approx 90 \frac{W^4}{R} \left[\frac{\text{ГэВ}}{\text{см}} \right]$

$$R = \text{const} \Rightarrow \frac{B}{W} = \text{const} \quad \text{и}$$

$$B(t) = \frac{W_0}{qec^2} W(t) \quad (5)$$

$$\Delta W = eV_0 \cos \phi_s = \frac{ec^2 \Gamma_0^2}{2\pi} \frac{dB}{dt} \quad (6) \quad \text{- прирост энергии за оборот (или одна резонансная накладка)}$$

$$\cos \varphi_s = \frac{ec^2 \Gamma_0^2}{2\pi e v_0} \frac{dB}{dt} \quad (7)$$

$$\left| \frac{ec^2 \Gamma_0^2}{2\pi e v_0} \frac{dB}{dt} \right| \leq 1 \quad (8)$$

Условие Веллера для
синхротрона (ум.
интегрирующим по времени
фазы)

Расширение орбиты и критическая энергия:

канонич.:

$$W = (m_0^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2} = m_0 c^2 (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{v} \frac{dW}{dv} = m_0 \gamma^3 \text{ — "продольная масса"}$$

аналог для угловой резонанс машины:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \omega} \right)_s / k^2 \omega_s = \left(\frac{\partial P}{\partial \omega} \right)_s / k \quad \text{и}$$

$$M = \left[k^2 \omega \frac{\partial W}{\partial \omega} \right]_s^{-1} = \left[k \frac{\partial P}{\partial \omega} \right]_s^{-1}$$

к-т расширения орбиты:

$$\frac{\partial R}{R} = \alpha \frac{\partial P}{P} \quad (9)$$

для мадони спок-ин:
 $0 < n < 1$ и $B = C \cdot R^{-n}$

$$\frac{dB}{B} = -n \frac{dR}{R} \quad (10)$$

$$p = eBR$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{dB}{B} + \frac{dR}{R} \quad (11)$$

тогда

$$\frac{dR}{R} = \frac{1}{1-n} \frac{dP}{P} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{1}{1-n} \quad (12)$$

т.к. $0 < n < 1$, то $\alpha > 0$

для угловой амплитуды спонцирования:

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \int \frac{D(s)}{v(s)} ds \quad ; \quad D - \text{дисперсия в магнитах};$$

Связь изменения частоты и амплитуды:

$$\frac{d\omega}{\omega} = -K \frac{d\rho}{\rho} \quad (13)$$

$$K > 0 \Leftrightarrow \omega(\rho) \searrow$$

$$K < 0 \Leftrightarrow \omega(\rho) \nearrow$$

т.к. $L = \gamma \tau$

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{d\gamma}{\gamma} - \frac{dL}{L} = \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dL}{L} \quad (14)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = (1-\beta)^2 \frac{d\rho}{\rho} = (1-\gamma^2) \frac{d\rho}{\rho} \quad (15)$$

объединяем (9), (14) и (15) и получаем:

$$\frac{d\omega}{d\rho} = \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) \frac{d\rho}{\rho} \quad (16) \Rightarrow K = \frac{1}{\gamma^2} - 1$$

K - коэффициент автофазировки;

слабая фок-ка: $\alpha > 1$ и $\gamma > 1 \Rightarrow K < 0$

сильная фок-ка: $\alpha < 1$ и $\gamma > 1$ или $\gamma > 1$ вблизи резонанса $\Rightarrow K > 0$

$\omega_{кр}$ соответствует $\frac{1}{\gamma^2} - 1 = 0$ т.е.

$$\gamma_{кр} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \omega_{кр} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \quad (17) \quad \text{критическая частота}$$

Фазовые изменения:

$$\varphi = q(\theta - \theta_0) - \omega_0 t \quad (18)$$

$$\Delta w_s = e U_0 \cos \varphi_s$$

$$\Delta w = e U_0 \cos \varphi$$

разность прироста энергии за оборот:

$$\Delta w - \Delta w_s = T_s \frac{dw}{dt} = \frac{2\pi}{\omega_s} \frac{dw}{dt} = e U_0 (\cos \varphi - \cos \varphi_s)$$

заменим: $E = \Delta w - \Delta w_s$

$$\frac{1}{\omega_s} \frac{dE}{dt} = \frac{e U_0}{2\pi} (\cos \varphi(t) - \cos \varphi_s) \quad (19)$$

продифференцируем (18)

$$\frac{1}{q} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \Delta \omega = \omega - \omega_s \quad (20)$$

т.к. $\omega = \omega(\rho)$ и $\left| \frac{\omega - \omega_s}{\omega_s} \right| \ll 1$, то вместо (20) можно использовать разложение:

$$\omega = \omega_s + \frac{d\omega}{d\rho} (\rho - \rho_s) \quad (21)$$

(24)

Подставляя (21) в (20) имеем:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi \in K \frac{\omega_s}{\omega_s} \quad (22) \quad \text{где} \quad \frac{\omega_s}{\omega_s} \frac{d\omega}{d\omega} = K$$

Упрощение (19) и (22) описывают фаз. движение в синхронизме

Если рассмотреть небольшие отрезки времени, то $\omega_s(t)$; $K(t)$; $\omega_s(t)$ можно считать постоянными, то (19) и (22) можно объединить в г.у. второго порядка:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varphi K \frac{\omega_s^2}{\omega_s} \frac{eV_0}{2\pi} (\cos\varphi - \cos\varphi_s) \quad (23)$$

Для малых отклонений фазы можно еще упростить ($\epsilon \ll 1$; $\varphi \ll 1$): $\cos\varphi \approx \cos\varphi_s - \varphi \sin\varphi_s$ и получить стандартное уравнение фазовых колебаний:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Omega_s^2 \varphi = 0 \quad (24)$$

$$\Omega_s^2 = \frac{\varphi \omega_s^2}{\omega_s} K \frac{eV_0}{2\pi} \sin\varphi_s \quad \text{— упр-ие малых фазовых колебаний}$$

$$\Omega_s^2 > 0 \Rightarrow K \sin\varphi_s > 0 \quad \text{— уст. движение}$$

при $\gamma = \gamma_{кр}$ автофазировка перестает работать.

Переход через $\gamma_{кр}$:

рассм. зависимость знака φ_s от K :

① Сильная фрон-ка при азимутально-симм. и.и.

$$\alpha > 0; \gamma \geq 0; K < 0 \Rightarrow \varphi_s < 0$$

② Сильная фрон-ка при $\gamma < \gamma_{кр}$

$$\alpha \ll 1; K > 0 \Rightarrow \varphi_s > 0$$

③ Сильная фрон-ка при $\gamma > \gamma_{кр}$

$$\alpha \ll 1; K > 0 \Rightarrow \varphi_s < 0$$

Запишем общее упр-ие фазовых колебаний

$$\frac{d}{dt} \left(f \frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{eV_0 \omega_s}{2\pi} (\cos\varphi - \cos\varphi_s) \quad (25)$$

$$\text{где} \quad f = \frac{\omega_s}{\varphi \omega_s K} \quad \text{есть медленная функция времени}$$

Синусoidalное движение, можно свести (23) к виду:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \Omega_s^2 \varphi + \frac{\dot{f}}{f} \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (26)$$

$f(t)$ имеет линейный характер изм. фазы частицы и связано только с изм. напряж. электрического и приводит к уменьшению амплитуды фазовых колебаний

Из (23) легко получить гамильтониан:

$$\frac{d\varphi}{dt} d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) - \frac{\Omega_s^2}{\sin \varphi_s} (\omega \varphi d\varphi - \omega \varphi_s d\varphi) = 0$$

$$\text{и} \quad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{2\Omega_s^2}{\sin \varphi_s} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi_s) = H \quad (27)$$

$$T + U = H$$

$$\text{и} \quad U = - \frac{2\Omega_s^2}{\sin \varphi_s} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi_s)$$

Сепаратриса:

$$H_0 = \dot{\varphi}_0^2 - \sin \varphi_0 + \varphi_0 \omega \varphi_s$$

тогда уравнение для сепаратрисы (или другой траектории с начальным φ_0)

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \dot{\varphi}_0^2 - \frac{2\Omega_s^2}{\sin \varphi_s} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi_s - \sin \varphi_0 + \varphi_0 \omega \varphi_s) = 0 \quad (28)$$

φ_0 и $\dot{\varphi}_0$ - начальные условия

Проанализируем:

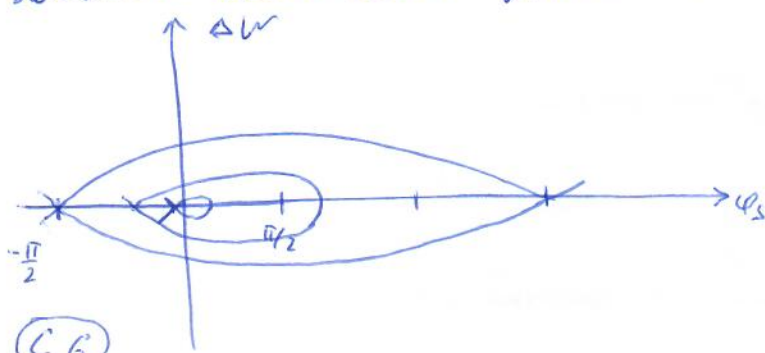
$\gamma < \gamma_{кр}$ и $\varphi_s > 0 \Rightarrow \varphi_n = -\varphi_s$ при этом частица останавливается $\Rightarrow \dot{\varphi}_0 = 0$ и получаем

$$\frac{1}{\Omega_s^2} \frac{d\varphi}{dt} = \pm \left(\frac{2}{\sin \varphi_s} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi_s + \sin \varphi_s - \varphi_s \omega \varphi_s) \right) \quad (29)$$

φ_n :

$$\sin \varphi_n - \varphi_n \omega \varphi_s + \sin \varphi_s - \varphi_s \omega \varphi_s = 0$$

Значение аналогично уравнению в м.у. ука.



максимальный размер при $\varphi_s = \pi/2$

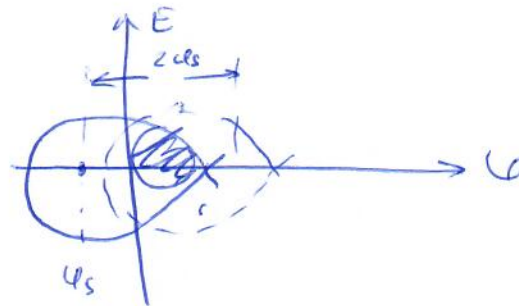
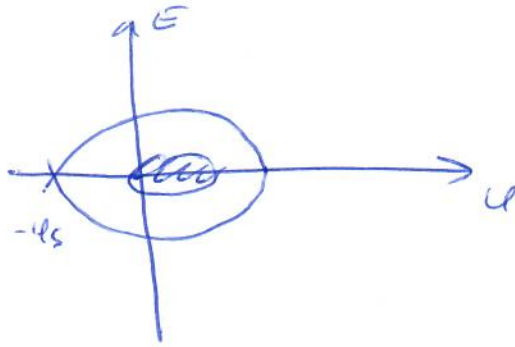
минимальный при $\varphi_s = 0$

удобно работать в координатах

$(\Delta W, \varphi)$ и связь между

$\frac{d\varphi}{dt}$ и ΔW определяется (22)

Рассмотрим теперь поведение спараториса при переходе через γ_{cr}
 $k \sin \varphi_s > 0$ - усл. автофазировки \Rightarrow при переходе через γ_{cr}
 φ_s должна менять знак скачком



методы прохода γ_{cr} :

- ① $\uparrow \gamma_{cr}$ за счет магнитной системы;
- ② изм. $\varphi_s \rightarrow \varphi$ скачком на $2\varphi_s$

Движение на ВЧ системе вблизи γ_{cr} можно упростить