

2.3. Представление непериодических функций времени в частотной области. Интеграл Фурье.

Метод рядов Фурье допускает представление в частотной области только периодических функций времени. Однако часто, когда возникает проблема обеспечения ЭМС изделия, имеют дело с непериодическими функциями, характерными, например, для коммутационных процессов, молнии или разрядов статического электричества и т. д.

Для представления непериодических функций $u(t)_{непер}$ в частотной области обычно исходят из комплексного ряда Фурье для периодической функции $u(t)_{пер}$. Эту функцию получают, дополнив мысленно исходную непериодическую функцию такими же сигналами, периодически следующими через некоторые интервалы времени T (пределы интегрирования $-T/2$ и $+T/2$):

$$u(t)_{пер} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u(t)_{непер} e^{-jn\omega_1 t} dt \right] e^{jn\omega_1 t} \quad (1.24)$$

Так как в линейчатом спектре ряда Фурье расстояние между спектральными линиями соответствует $\Delta f = \Delta\omega / 2\pi = f_1 = 1/T$, то (1.24) можно также записать

$$u(t)_{\text{пер}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\Delta\omega \int_{-T/2}^{+T/2} u(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \right] e^{jn\omega_1 t} \quad (1.25)$$

Для того, чтобы вернуться к одиночному импульсу, следует устремить к бесконечности период повторения импульса $T \rightarrow \infty$. Тогда при $\Delta f \rightarrow 0$ конечное расстояние между спектральными линиями $\Delta\omega$ за знаком суммы переходит в бесконечно малое расстояние $d\omega$, дискретная переменная $n\Delta\omega$ — в непрерывную переменную ω , а сумма — в интеграл. Таким образом, получают интеграл Фурье для непериодической функции $u(t)_{\text{непер}}$:

$$u(t)_{\text{непер}} = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \Delta f \rightarrow 0}} u(t)_{\text{пер}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt}_{X(\omega)} e^{j\omega t} d\omega \quad (1.26)$$

где

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.27)$$

спектральная функция или спектральная плотность сигнала $u(t)_{\text{непер}}$; Модуль $|X(\omega)|$ — представляет собой плотность распределения амплитуд.

Для непериодической функции $u(t)$ преобразование Фурье имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.28)$$

Следовательно, преобразование Фурье и его обращение взаимобратные с точностью до множителя $\frac{1}{2\pi}$.

Название "спектральная плотность" происходит оттого, что спектральная функция $X(\omega)$ идентична линейчатому спектру C_n , отнесенному к расстоянию между соседними частотами. Так как $T = \frac{1}{\Delta f} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$, получаем

$$C_n = \Delta f \int_{-T/2}^{+T/2} u(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (1.29)$$

Если отнести амплитуды C_n к Δf и образовать предельное значение для $T \rightarrow \infty$ (соответственно $\Delta f \rightarrow 0$), получим

$$\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \Delta f \rightarrow 0}} \frac{C_n}{\Delta f} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = X(\omega),$$

иначе говоря, спектральную плотность.

Если, например, линейчатый спектр C_n измеряется в вольтах, то спектральная плотность $X(\omega)$ сравнимого однократного процесса имеет размерность В/Гц.

Таким образом, непериодические процессы тоже могут быть представлены как наложение синусоидальных или косинусоидальных колебаний. Однако в отличие от периодических процессов здесь участвуют все частоты от $-\infty$ до $+\infty$ с амплитудами $X(\omega) d\omega$. Так как при однократных процессах содержащаяся в одном импульсе конечная энергия распределяется на бесконечное множество частот, то амплитуда отдельной спектральной составляющей должна быть бесконечно малой. Чтобы избежать этой неопределенности, относят энергию импульса к частоте и получают, таким образом, спектральную плотность, предельное значение которой при $\Delta f \rightarrow 0$ остается конечным и как раз соответствует преобразованию Фурье.

Если нанести на графике вплотную к линейчатому спектру периодической функции модуль спектральной плотности, получим непрерывный спектр плотности распределения амплитуд непериодического процесса. Из преобразования Фурье для прямоугольного импульса длительностью τ и амплитудой U_m

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2} e^{j\omega t} d\omega \quad (1.30)$$

можно получить, например, "физическую" плотность распределения амплитуд ($2|X|$ — измеренное значение) как

$$u(f) = 2U_m \tau \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} \quad (1.31)$$

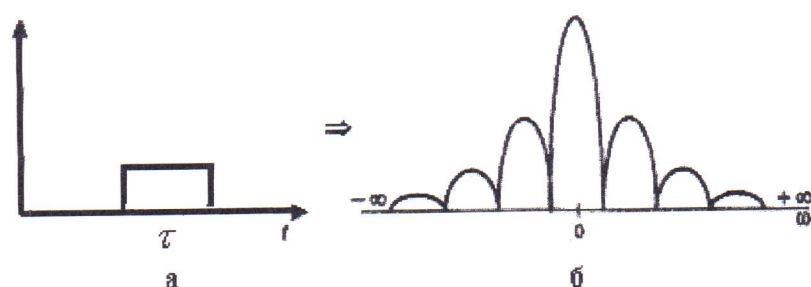


Рис.. . Спектральное разложение идеального импульса
Однократный прямоугольный импульс (а) и соответствующая “физическая” плотность распределения амплитуд (б)

Прямоугольный импульс и соответствующая плотность распределения амплитуд показаны на рис. . Очевидно, и непрерывный спектр одиночного прямоугольного импульса представляет функцию $Si(x) = (\sin x / x)$ и имеет составляющие всего спектра частот, от $-\infty$ до $+\infty$. Нулевые значения этой функции равнозначны величине обратной длительности импульса. При низких частотах функция синуса совпадает со своим аргументом, так что начальное значение спектра пропорционально двойной площади импульса $2U_m\tau$. Для оси частот часто выбирают логарифмический масштаб, вследствие чего нулевые значения функции $Si(x)$ не распределяются на одинаковых расстояниях, а с растущей частотой плотнее располагаются друг к другу.

Для сигналов произвольной формы, встречающихся на практике, спектр можно найти с помощью специальных приборов - спектральных анализаторов, которые измеряют спектр реального сигнала и отображают амплитуды составляющих гармоник на экране или на принтере.

Теперь, вспомнив принципы представления сигналов, можно понять и причину их искажения. Если в передающем канале в какой либо его части (в кабеле, в фильтре, в разъеме и т.д.) под действием внешних или внутренних факторов происходит искажение хоть какой-нибудь гармоники сигнала, то это приводит, в конечном счете, к искажению формы всего передаваемого сигнала. Следует иметь в виду (мы с этим еще столкнемся в данном курсе), что синусоиды различных частот различными элементами канала искажаются неодинаково. Если это аналоговый сигнал, передающий речь, то изменяется тембр голоса за счет искажения обертонов - боковых частот. При передаче импульсных сигналов, характерных для компьютерных сетей, искажаются низкочастотные и высокочастотные гармоники, в результате фронты импульсов теряют свою прямоугольную форму. Вследствие этого на приемном конце линии сигналы могут плохо распознаваться (рис.).

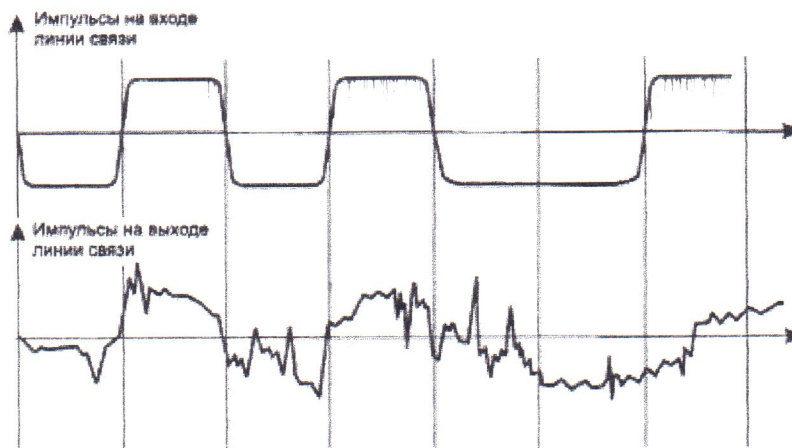


Рис. . Искажение импульсов в линии связи

Линия связи искажает передаваемые сигналы из-за того также, что ее физические (например, погонные) параметры отличаются от идеальных. В результате для синусоид различных частот линия будет обладать различным полным сопротивлением, а значит, и передаваться они будут по-разному. (Волоконно-оптический кабель также имеет отклонения, мешающие идеальному распространению света.) Если линия связи включает промежуточную аппаратуру, то она также может вносить дополнительные искажения, так как невозможно создать устройства, которые бы одинаково хорошо передавали весь спектр синусоид, от нуля до бесконечности.

Кроме искажений сигналов, вносимых внутренними физическими параметрами линии связи, свой вклад в искажение формы сигналов на выходе линии вносят и внешние помехи, полностью компенсировать влияние которых не всегда удастся. Поэтому сигналы на выходе линии связи обычно имеют сложную форму (как это и показано на рис. .), по которой иногда трудно понять, какая дискретная информация была подана на вход линии.